

# Funções

Grupo de Matemática da Universidade Técnica de Lisboa:  
António St. Aubyn, Maria Carlos Figueiredo,  
Luís de Loura, Luísa Ribeiro, Francisco Viegas

Lisboa, Março de 2004

O documento presente foi obtido directamente do código TeX fornecido pelos autores com alterações de formatação e alguma revisão editorial. A versão corrente é de 10 de Janeiro de 2006. A revisão deste texto do ponto de vista gráfico ainda não está completa. Novas versões poderão ficar disponíveis no futuro a partir de <http://preprint.math.ist.utl.pt/files/ppgmutilfuncoes.pdf>. O DMIST agradece ao Grupo de Matemática da UTL a possibilidade de facultar o texto aos alunos das disciplinas introdutórias de Matemática do IST.



Na mesma série:

- Lógica matemática.
- Conjuntos.
- Números reais.
- Sucessões.
- Funções.
- Funções reais de variável real.
- Funções trigonométricas.
- Função exponencial.
- Continuidade.
- Derivadas.

## Funções

Na vida corrente é usual estabelecermos correspondências, muitas vezes de forma tão natural que nem tomamos consciência desse facto. Por exemplo, quando uma criança pequena se refere ao seu “urso verde” e ao “coelho amarelo”, está a estabelecer uma correspondência

<b>Boneco</b>	→	<b>Cor</b>
urso	↦	verde
coelho	↦	amarelo

Este tipo de procedimento é fundamental em qualquer ciência. A Matemática pretende tornar esta ideia rigorosa (definindo *função*) de modo a eliminar qualquer ambiguidade.

Consideremos a seguinte situação comum: numa turma de quatro alunos, o professor faz a chamada

António	Sousa
Joana	Silva
Maria	Sá
Pedro	Sarmento

Temos dois conjuntos

$$A = \{\text{António, Joana, Maria, Pedro}\},$$
$$B = \{\text{Sá, Sarmento, Silva, Sousa}\},$$

e uma correspondência de  $A$  em  $B$ , que a cada elemento de  $A$  associa o respectivo apelido, elemento de  $B$ . Por outras palavras, dado um  $x$  em  $A$  a expressão “apelido de  $x$ ” identifica um (e um só) elemento de  $B$ .

Imaginemos agora que, aos mesmos alunos, o professor pergunta onde passaram as férias grandes, obtendo as respostas

António	—	campo
Joana	—	praia
Maria	—	campo
Pedro	—	praia e campo

Tomando o conjunto  $C = \{\text{campo, praia}\}$ , temos acima uma correspondência de  $A$  em  $C$ . Há, no entanto, uma diferença fundamental: dado  $x \in A$ , a expressão “local onde se passou as férias grandes” não identifica um elemento único de  $C$ , visto que o Pedro passou férias no campo e na praia.

Esta ambiguidade na imagem não é aceitável em Matemática: no primeiro caso, a correspondência é uma função de  $A$  em  $B$  enquanto que, no segundo caso, a correspondência não é uma função de  $A$  em  $C$ .

Com rigor diremos que:

**Definição 1.** *Dados dois conjuntos<sup>1</sup>  $A$  e  $B$ , uma função (ou aplicação) de  $A$  em  $B$  é uma correspondência que a cada elemento  $x \in A$  associa um e um só elemento  $y \in B$ .*

Recordando as notações habituais:

**Definição 2.** *Se  $f$  é uma função de  $A$  em  $B$  escrevemos  $f : A \rightarrow B$ ; ao conjunto  $A$  chamamos domínio de  $f$  e ao conjunto  $B$  conjunto de chegada de  $f$ .*

Uma função está bem definida se conhecermos o seu domínio, o seu conjunto de chegada e a “regra” que permite determinar a imagem de qualquer elemento do seu domínio.

Suponhamos que alguém nos diz: seja uma função  $f$  de domínio  $\mathbb{N}_1$ , e com valores em  $\mathbb{N}_1$ , tal que

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, & f(2) &= 2, & f(3) &= 3, \\ f(4) &= 3, & f(5) &= 5, & f(6) &= 5, \\ f(7) &= 7, & f(8) &= 7, & & \dots \end{aligned}$$

Ora, de acordo com a informação disponível, sabemos que 16 é elemento do domínio de  $f$ , mas não temos ideia de qual será o valor de  $f(16)$ : a função  $f$  não está bem definida.

No entanto, se em alternativa nos disserem o seguinte: seja  $f : \mathbb{N}_1 \rightarrow \mathbb{N}_1$  a função que a cada natural positivo  $n$  associa “o maior número primo inferior ou igual a  $n$ ” (isto é, dão-nos a “regra”), então a função  $f$  está bem definida; em particular sabemos que  $f(16) = 13$ .

É frequente o uso de diagramas de Venn para, de forma sugestiva, representar uma função. Por exemplo, uma função  $F : A \rightarrow B$ , será representada como na figura 1.

---

<sup>1</sup>Para simplificar, vamos sempre supor que os conjuntos referidos são não vazios.

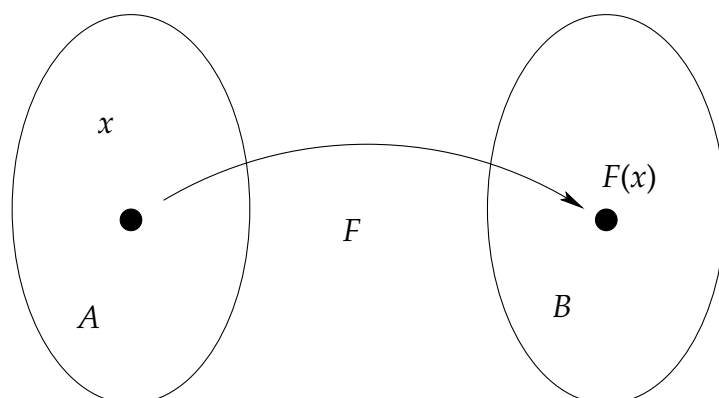


Figura 1: Diagrama de Venn de uma função  $F$ .

Consideremos agora alguns exemplos de funções:

*Exemplo 1.*

$$A = \{\text{Inês, António, Maria, Gil}\}$$

$$B = \{\text{Sá, Sarmiento, Silva, Sousa}\}$$

$$\varphi : A \rightarrow B$$

$$\varphi(\text{Inês}) = \text{Silva}$$

$$\varphi(\text{António}) = \text{Sousa}$$

$$\varphi(\text{Maria}) = \text{Sá}$$

$$\varphi(\text{Gil}) = \text{Sarmiento}$$

ou,

$$\varphi(x) = \text{apelido de } x \quad \forall x \in A.$$

*Exemplo 2.*

$B$ , o conjunto do exemplo 1

$$C = \{\text{Rua da Rosa, Rua do Malmequer, Rua do Lírio, Rua do Cravo}\}$$

$$\psi : B \rightarrow C$$

$$\psi(\text{Sá}) = \text{Rua da Rosa}$$

$$\psi(\text{Sarmiento}) = \text{Rua do Cravo}$$

$$\psi(\text{Silva}) = \text{Rua da Rosa}$$

$$\psi(\text{Sousa}) = \text{Rua do Malmequer}$$

ou,

$$\psi(x) = \text{rua onde } x \text{ mora} \quad \forall x \in B.$$

Exemplo 3.

$$\begin{aligned}D &= \{(1, 1), (2, 3), (3, 6)\} \\h &: D \rightarrow \mathbb{R} \\h((1, 1)) &= 2 \\h((2, 3)) &= 5 \\h((3, 6)) &= 9\end{aligned}$$

ou,

$$h((x, y)) = x + y \quad \forall (x, y) \in D.$$

Exemplo 4.

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\f(x) &= 2x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Exemplo 5.

$$\begin{aligned}g &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\g(x) &= 2x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Observemos que as funções dos exemplos 4 e 5 são diferentes, uma vez que têm domínios distintos. No entanto, a expressão designatória que as define é a mesma; além disso, o domínio de  $f$  é um subconjunto do domínio de  $g$ . Por esta razão, dizemos que  $f$  é a restrição de  $g$  ao conjunto  $\mathbb{N}$ . Mais geralmente,

**Definição 3.** Dada uma função  $\varphi : A \rightarrow B$  e um conjunto  $C$  tal que  $C \subset A$ , chamamos restrição de  $\varphi$  a  $C$  à função  $\psi$  definida por

$$\begin{aligned}\psi &: C \rightarrow B \\ \psi(x) &= \varphi(x) \quad \forall x \in C\end{aligned}$$

e denotamos  $\psi = \varphi|_C$ .

Nas condições da definição, diremos também que  $\varphi$  é um prolongamento de  $\psi$  ao conjunto  $A$ .

No entanto, se bem que “restrição de  $\varphi$  a  $C$ ” é uma afirmação precisa, “prolongamento de  $\psi$  a  $A$ ” não o é.

Com efeito, dada uma função  $\varphi : A \rightarrow B$  e o conjunto  $C \subset A$ , a restrição de  $\varphi$  ao conjunto  $C$  é uma função  $C \rightarrow B$ , única.

Por outro lado, dada uma função  $\psi : C \rightarrow B$  e um conjunto  $A \supset C$ , em geral, podemos prolongar  $\psi$  a  $A$  de diversas maneiras, isto é, o prolongamento não é único. Mais precisamente, é fácil provar que o prolongamento

de  $\psi$  a  $A$  é único sse  $A = C$  (caso em que o prolongamento de  $\psi$  a  $A$  coincide com a própria  $\psi$ ) ou  $B$  é um conjunto singular (caso em que o prolongamento de  $\psi$  a  $A$  é uma função constante).

Assim, a função

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \forall x \in \mathbb{N} \\ -1 & \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$$

tem, como restrição a  $\mathbb{N}$ , a função  $f$  do exemplo 4, logo  $F$  é um prolongamento de  $f$  a  $\mathbb{R}$ . Mas  $g$  (no exemplo 5) também é um prolongamento de  $f$  a  $\mathbb{R}$  e as funções  $F$  e  $g$  são distintas.

No que se segue, continuamos a fazer considerações sobre os cinco exemplos atrás, que nos irão sugerir novas definições importantes.

Notemos agora o seguinte:

No exemplo 1, todo o elemento do conjunto  $B$  é imagem por  $\varphi$  de algum elemento de  $A$ . Pelo contrário, no exemplo 2, nenhum elemento de  $B$  mora na Rua do Lírio. Do mesmo modo, no exemplo 3, apenas os números reais 2, 5 e 9 são imagem por  $h$  de elementos de  $D$ . Concluimos que o conjunto das imagens de uma dada função pode ser distinto do conjunto de chegada. Assim começamos por definir:

**Definição 4.** Dada uma função  $f : A \rightarrow B$  chamamos contradomínio de  $f$  ao subconjunto de  $B$  dado por

$$\{y \in B; \exists x \in A \quad y = f(x)\} = \{f(x); x \in A\}.$$

Como vimos, há funções para as quais o contradomínio coincide com o conjunto de chegada e outras para as quais isto não acontece. Esta diferença sugere a definição seguinte:

**Definição 5.** Uma função  $f : A \rightarrow B$  é sobrejectiva sse o contradomínio de  $f$  coincide com  $B$ . Simbolicamente,  $f$  é sobrejectiva sse

$$\forall y \in B \exists x \in A \quad y = f(x).$$

Caso a função  $f$  de  $A$  em  $B$  seja sobrejectiva, muitas vezes dizemos que  $f$  é função de  $A$  sobre  $B$ .

Assim, a função do exemplo 1 é sobrejectiva, enquanto que nem  $\psi$  (exemplo 2) nem  $h$  (exemplo 3) o é.

No exemplo 4, o ponto 0 não está no contradomínio, logo  $f$  não é sobrejectiva. Já no exemplo 5,  $g$  é sobrejectiva: dado um qualquer número real  $a$ ,

$$b = \frac{a-1}{2}$$

é um número real e tem-se que  $g(b) = a$ ; isto é,

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R} : 2b + 1 = a.$$

A propósito da noção de contradomínio, introduzimos agora uma noção muito útil e sugestiva:

**Definição 6.** *Seja  $f : A \rightarrow B$  e  $C$  um conjunto qualquer; designamos por imagem de  $C$  por  $f$ ,  $f(C)$ , o subconjunto de  $B$  constituído pelas imagens por  $f$  de todos os elementos de  $C$ , isto é,*

$$f(C) = \{f(x); x \in C \cap A\}.$$

Nestas condições, se  $C \cap A = \emptyset$ , tem-se  $f(C) = \emptyset$ ; se  $C \cap A \neq \emptyset$ , então  $f(C)$  é o contradomínio da restrição de  $f$  ao conjunto  $C \cap A$  e, em particular, com  $C = A$ ,  $f(A)$  designa o contradomínio da função  $f$ . Com esta notação,  $f : A \rightarrow B$  é sobrejectiva sse  $f(A) = B$ .

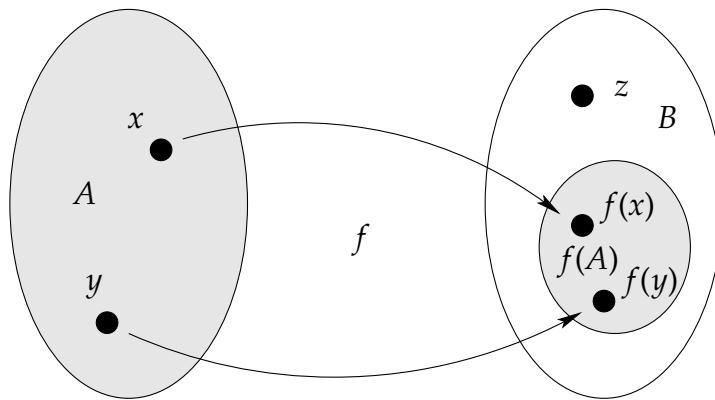


Figura 2: Diagrama de Venn para uma função *não* sobrejectiva.

Uma outra propriedade importante pode ser também motivada pelos exemplos anteriores:

No exemplo 2, Sá e Silva moram na mesma rua, ou seja,

$$\psi(\text{Sá}) = \psi(\text{Silva}) = \text{Rua da Rosa}.$$

Pelo contrário, em qualquer um dos outros exemplos, a função faz corresponder imagens diferentes a objectos diferentes; uma função nestas condições diz-se *injectiva*. Assim,



**Definição 7.** Uma função  $f : A \rightarrow B$  diz-se injectiva sse elementos distintos de  $A$  têm imagens distintas.

De forma equivalente,  $f$  é injectiva sse

$$\forall x, y \in A \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y),$$

ou, ainda, sse

$$\forall x, y \in A \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

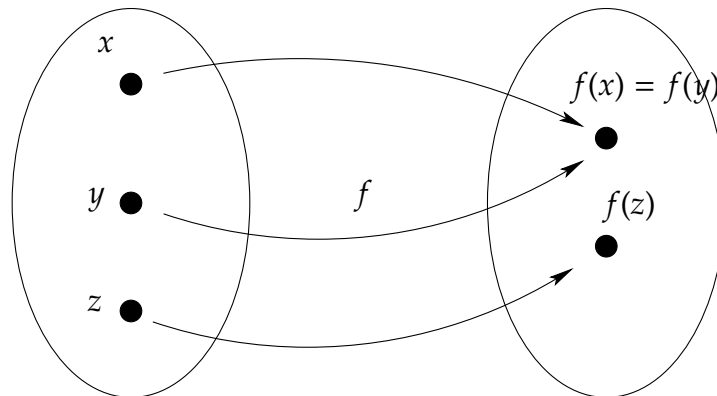


Figura 3: Diagrama de Venn para uma função não injectiva.

Então, a função  $\psi$  do exemplo 2 não é injectiva.

Reunindo as duas noções, de sobrejectividade e de injectividade,

**Definição 8.** Uma função  $f : A \rightarrow B$  diz-se bijectiva sse é sobrejectiva e injectiva.

Em linguagem simbólica,  $f : A \rightarrow B$  é bijectiva sse

$$\forall y \in B \exists^1 x \in A : f(x) = y.$$

As funções  $\varphi$  do exemplo 1 e  $g$  do exemplo 5 são bijectivas.

$\psi$  não é bijectiva porque não é injectiva nem sobrejectiva.

As funções  $h$  do exemplo 3 e  $f$  do exemplo 4 não são bijectivas porque, embora sejam ambas injectivas, não são sobrejectivas.

Exemplo 6.

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$F(x) = (x - 1)^2 + 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A função  $F$  não é injectiva porque, por exemplo,

$$F(0) = F(2).$$

$F$  também não é sobrejectiva, uma vez que se tem

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) \geq 2,$$

logo, por exemplo,  $y = 1$  não pertence ao contradomínio de  $F$ .

*Exemplo 7.* Seja  $A$  um conjunto. À função  $i$  (dependente do conjunto  $A$ ) definida por

$$\begin{aligned} i : A &\rightarrow A \\ i(x) &= x \quad \forall x \in A \end{aligned}$$

chamamos função *identidade em  $A$* . É evidente que se trata de uma função bijectiva.

Retomemos a função  $\varphi$  do exemplo 1; como dissemos, trata-se de uma função bijectiva. Podemos, de forma natural, estabelecer a correspondência “inversa”, agora de  $B$  em  $A$  e dada por

$$\begin{aligned} \text{Sousa} &\text{ — António} \\ \text{Silva} &\text{ — Inês} \\ \text{Sá} &\text{ — Maria} \\ \text{Sarmiento} &\text{ — Gil} \end{aligned}$$

Deste modo, definimos uma nova função.

Ao aplicarmos o mesmo tipo de procedimento à função  $\psi$  do exemplo 2, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Rua da Rosa} &\text{ — } \begin{cases} \text{Sá} \\ \text{Silva} \end{cases} \\ \text{Rua do Cravo} &\text{ — Sarmiento} \\ \text{Rua do Malmequer} &\text{ — Sousa} \\ \text{Rua do Lírio} &\text{ — (não tem imagem)} \end{aligned}$$

Ora, intuitivamente, não faz muito sentido falar de uma correspondência definida no conjunto  $C$  e depois, haver elementos de  $C$  sem imagem. Será mais natural, portanto, começar por considerar o contradomínio de  $\psi$ ,  $\psi(B)$ , e depois definir a correspondência de  $\psi(B)$  em  $B$  seguinte

$$\begin{aligned} \text{Rua da Rosa} &\text{ — } \begin{cases} \text{Sá} \\ \text{Silva} \end{cases} \\ \text{Rua do Cravo} &\text{ — Sarmiento} \\ \text{Rua do Malmequer} &\text{ — Sousa} \end{aligned}$$

No entanto, esta correspondência não é uma função!

Já no caso do exemplo 3, podemos definir uma função de  $h(D) = \{2, 5, 9\}$  em  $D$  por

$$2 \mapsto (1, 1)$$

$$5 \mapsto (2, 3)$$

$$9 \mapsto (3, 6)$$

As considerações anteriores tornam evidente que o facto da correspondência “inversa” ser uma função está relacionado com a injectividade da função inicial. Mais precisamente, a correspondência “inversa” de uma dada função  $f$  é uma função sse  $f$  é injectiva. Assim

**Definição 9.** *Seja  $f : A \rightarrow B$  uma função injectiva. À função de  $f(A)$  em  $A$  que a cada  $x \in f(A)$  faz corresponder o (único)  $y \in A$  tal que  $f(y) = x$ , damos o nome de função inversa de  $f$  e designamo-la por  $f^{-1}$ .*

*De forma equivalente tem-se*

$$f^{-1} : f(A) \rightarrow A$$

$$\forall x \in f(A) \quad f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x.$$

Utilizando diagramas de Venn tem-se, de forma sugestiva,

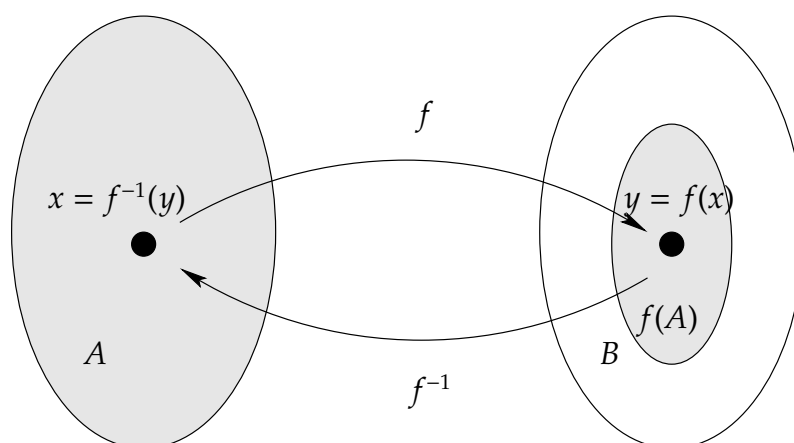


Figura 4: Diagrama de Venn de função inversa.

Observe-se que, nas condições da definição,  $f^{-1}$  é uma função bijectiva definida em  $f(A)$  com valores em  $A$ .

*Exemplo 8.* A função (no exemplo 4)

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$
$$f(x) = 2x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{N}$$

é injectiva, logo é invertível.

O seu contradomínio  $f(\mathbb{N})$  é constituído pelos números naturais ímpares, isto é,

$$f(\mathbb{N}) = \{x \in \mathbb{N}; \exists m \in \mathbb{N} \quad x = 2m + 1\}.$$

A sua função inversa é, portanto, definida por

$$f^{-1} : f(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N}$$
$$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \quad \forall x \in f(\mathbb{N}).$$

Analogamente, no exemplo 5, a função  $g$  também é invertível e tem-se

$$g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$g^{-1}(x) = \frac{x-1}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(Note-se que  $g$  é função sobrejectiva, pois  $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ).

*Exemplo 9.* Consideremos a função

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\alpha(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Trata-se de uma função não sobrejectiva, visto que  $\alpha(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty[$ . Além disso, e este é o problema,  $\alpha$  não é injectiva, logo não é invertível.

No entanto, já é injectiva a restrição de  $\alpha$  ao conjunto  $\mathbb{R}_0^+$ ; designemos esta restrição por  $\beta$ :

$$\beta : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$$
$$\beta(x) = x^2 \quad \forall x \geq 0.$$

A inversa  $\beta^{-1}$  é a função definida por

$$\beta^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \quad \beta^{-1}(x) = y \Leftrightarrow y^2 = x \wedge y \geq 0.$$

Como sabe, dado um real  $x \in \mathbb{R}_0^+$ , o único  $y \in \mathbb{R}_0^+$  tal que  $y^2 = x$  é, por definição, designado por  $\sqrt{x}$ . Neste sentido, tem-se

$$\beta^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+.$$

Mas também a restrição de  $\alpha$  ao conjunto  $\mathbb{R}_0^- = ]-\infty, 0]$  é função injectiva com contradomínio  $\mathbb{R}_0^+$ ; designemo-la por  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R}_0^- &\rightarrow \mathbb{R} \\ \gamma(x) &= x^2 \quad \forall x \leq 0. \end{aligned}$$

Como  $\gamma(\mathbb{R}_0^-) = \mathbb{R}_0^+$ , logo a inversa  $\gamma^{-1}$  é a função definida por

$$\begin{aligned} \gamma^{-1} : \mathbb{R}_0^+ &\rightarrow \mathbb{R}_0^- \\ \gamma^{-1}(x) &= -\sqrt{x} \quad \forall x \geq 0. \end{aligned}$$

Em seguida, propomo-nos recordar um processo muito comum de gerar novas funções: o método da composição.

De um ponto de vista intuitivo, a origem do processo da composição reside numa ideia muito simples, ilustrada pelo seguinte exemplo: uma pessoa sai de Lisboa, vai de carro até Coimbra, aí toma o comboio para o Porto, onde, finalmente, apanha o barco para a Régua. Omitindo os pormenores da viagem, a pessoa viajou de Lisboa até à Régua!

*Exemplo 10.* Consideremos, de novo, as funções  $\varphi$  e  $\psi$  dos dois primeiros exemplos. Em linguagem corrente, tomando um aluno do conjunto  $A$ , a função  $\varphi$  começa por lhe associar o respectivo apelido e, em seguida, a função  $\psi$  associa ao apelido, a rua onde mora. Tem-se, por exemplo,

$$\text{Inês} \xrightarrow{\varphi} \text{Silva} \xrightarrow{\psi} \text{Rua da Rosa.}$$

Seguindo este processo, a cada aluno acabamos por lhe associar a rua onde mora; mais precisamente, estamos a considerar uma (nova) função de  $A$  em  $C$  tal que

$$A \ni x \mapsto \text{rua onde } x \text{ mora,}$$

ou, usando a notação acima,

$$A \ni x \mapsto \psi(\varphi(x)) \in C.$$

A esta função damos o nome de “ $\varphi$  composta por  $\psi$ ” e designamo-la por  $\psi \circ \varphi$ . Resumindo,

$$\begin{aligned} \psi \circ \varphi : A &\rightarrow C \\ \psi \circ \varphi(x) &= \psi(\varphi(x)) \quad \forall x \in A. \end{aligned}$$

Observe-se que, neste caso, não tem sentido considerar a composição de  $\psi$  com  $\varphi$ ,  $\varphi \circ \psi$ .

*Exemplo 11.* Vejamos ainda mais um exemplo, tomando a função no exemplo 6,

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = (x - 1)^2 + 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Partindo de um número real  $x$  e até chegarmos ao número real  $f(x)$ , seguimos o seguinte “itinerário”:

- A  $x$  começamos por associar o número real  $x - 1$ ; por outras palavras, consideramos a função

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Em seguida, ao real  $x - 1$  associamos-lhe o seu quadrado  $(x - 1)^2$ ; estamos pois a considerar a função

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(y) = y^2 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

- Finalmente, ao número real  $(x - 1)^2$  adicionamos-lhe o número 2:

$$j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$j(z) = z + 2 \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Resumindo, dado um número real  $x$ ,

$$x \xrightarrow{g} x - 1 \xrightarrow{h} (x - 1)^2 \xrightarrow{j} (x - 1)^2 + 2,$$

isto é,

$$f(x) = j(h(g(x))) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ou ainda,

$$f = j \circ h \circ g.$$

Em termos gerais, a situação é pois a seguinte: são dadas funções  $f : A \rightarrow B$  e  $g : C \rightarrow D$  tais que o contradomínio de  $f$  é um subconjunto do domínio de  $g$ ,  $f(A) \subset C$ . De acordo com esta condição, qualquer que seja o  $x \in A$ , a sua imagem  $f(x)$  está no domínio de  $g$  e, conseqüentemente, existe  $g(f(x)) \in D$ .

Deste modo, podemos considerar a “cadeia”

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & f(A) \subset C & \longrightarrow & D \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

o que define uma nova função de  $A$  com valores em  $D$ .

**Definição 10.** Damos o nome de  $g$  composta com  $f$ , e designamos por  $g \circ f$ , à função definida por

$$g \circ f : A \rightarrow D$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \forall x \in A.$$

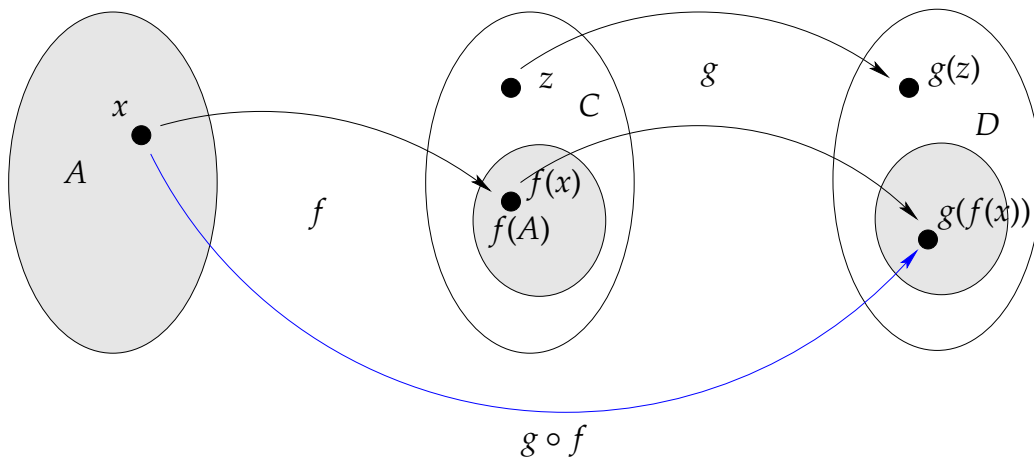


Figura 5: Diagrama de Venn de uma função composta.

Além disso, se supusermos que  $g(C) \subset A$ , podemos então definir uma função de  $C$  em  $B$ , notada por  $f \circ g$  e dada por

$$f \circ g : C \rightarrow B$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad \forall x \in C.$$

*Exemplo 12.* Consideremos

$$f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sqrt{x} - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

e

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \neq 0.$$

Ao pretendermos definir  $g \circ f$ , surge imediatamente um problema:  $f(1) = 0$  e  $0 \notin \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , isto é, o contradomínio de  $f$  não é um subconjunto do domínio de  $g$ .

Como se tem

$$\{x \in \mathbb{R}_0^+ : f(x) = 0\} = \{1\}$$

apenas podemos definir  $g$  composta com a restrição de  $f$  ao conjunto  $\mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} g \circ (f|_{\mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}}) : \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(\sqrt{x} - 1) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}. \end{aligned}$$

A notação é, no entanto, bastante pesada, o que é indesejável. Por isso, referir-nos-emos à função  $g \circ f$ , mas não esquecendo que esta função tem por domínio o conjunto

$$\begin{aligned} &\{x \in \mathbb{R}; x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0 \wedge \sqrt{x} - 1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0 \wedge x \neq 1\} \end{aligned}$$

onde  $D_f$  e  $D_g$  designam o domínio de  $f$  e o de  $g$ , respectivamente.

Temos, por fim

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (g \circ f)(x) &= \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{1\}. \end{aligned}$$

De forma análoga, designamos por  $f \circ g$  a função que tem por domínio o conjunto

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}; x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\} &= \left\{x \in \mathbb{R}; x \neq 0 \wedge \frac{1}{x} \geq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0 \wedge x > 0\} = \mathbb{R}^+ = ]0, +\infty[. \end{aligned}$$

Além disso

$$\forall x > 0 \quad (f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{\frac{1}{x}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1.$$

Então, tem-se

$$\begin{aligned} f \circ g : ]0, +\infty[ &\rightarrow \mathbb{R}, \\ (f \circ g)(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \quad \forall x > 0. \end{aligned}$$

Observemos que  $f \circ g \neq g \circ f$ .



O senso comum sugere-nos que, dada uma função  $f$  injetiva, compondo  $f$  com a sua inversa  $f^{-1}$  obtemos a função identidade. O que é verdade se mantivermos esta imprecisão. O ponto de vista matemático, no entanto, impõe-nos rigor pelo que:

*Exemplo 13.* Seja  $h : A \rightarrow B$  uma função injetiva; nestas condições,  $h^{-1}$  é a função definida no conjunto  $h(A) \subset B$  por

$$\forall x \in h(A) \quad h^{-1}(x) = y \Leftrightarrow h(y) = x.$$

A função composta  $h \circ h^{-1}$  está, portanto, definida em

$$\{x \in B; x \in D_{h^{-1}} \wedge h^{-1}(x) \in D_h\} = \{x \in B; x \in h(A) \wedge h^{-1}(x) \in A\} = h(A)$$

e tem-se

$$\forall x \in h(A) \quad (h \circ h^{-1})(x) = h(h^{-1}(x)) = x.$$

Concluindo,  $h \circ h^{-1}$  é a função identidade em  $h(A)$ .

Por outro lado  $h^{-1} \circ h$  tem por domínio

$$\{x \in A; h(x) \in D_{h^{-1}}\} = \{x \in A; h(x) \in h(A)\} = A$$

e tem-se

$$\forall x \in A \quad (h^{-1} \circ h)(x) = h^{-1}(h(x)) = x$$

e  $h^{-1} \circ h$  é a função identidade em  $A$ .

Note-se que, em geral, as funções  $h \circ h^{-1}$  e  $h^{-1} \circ h$  têm domínios diferentes, logo são funções distintas. Mais precisamente, tem-se

$$h \circ h^{-1} = h^{-1} \circ h \quad \Leftrightarrow \quad A = h(A).$$

Para terminar, faremos ainda referência a uma noção já conhecida. Então, à excepção dos exemplos 1 e 2, em todos os outros, o conjunto de chegada da função respectiva é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ ; por outras palavras, cada uma dessas funções tem números reais por imagens ou, abreviadamente, é uma função real.

Nos exemplos anteriores, agora à excepção de 1, 2 e 3, também o respectivo domínio é um subconjunto de  $\mathbb{R}$ , razão pela qual diremos que qualquer uma destas funções tem variável real.

Formalizando,

**Definição 11.** *Seja uma função  $f : A \rightarrow B$ .*

*A função  $f$  é real sse  $B \subset \mathbb{R}$ .*

*A função  $f$  é de variável real sse  $A \subset \mathbb{R}$ .*

Podemos então dizer que:

As funções  $\varphi$  e  $\psi$  dos exemplos 1 e 2, não são reais nem são de variável real.

A função  $h$  do exemplo 3 é real, mas não é de variável real.

Todos os restantes exemplos são de funções reais de variável real.

## Índice remissivo

$f(C)$ , 8

aplicação, *ver* função

composição, 13

conjunto de chegada, 4

contradomínio, 7

diagrama de Venn, 4, 5, 8, 9, 11

domínio, 4

função, 3, 4

    bijectiva, 9

    composta, 15

    de variável real, 17

    identidade, 10

    injectiva, 8, 9

    inversa, 10, 11

    real, 17

    sobrejectiva, 7

imagem

    de um conjunto por uma função,  
    8

prolongamento, 6

restrição, 6